Rappels de géométrie différentielle

Raphaël ALEXANDRE et Elisha FALBEL

13 janvier 2022

Nous supposons que tous les objets sont lisses. Soit M une variété différentielle. Elle est munie de son fibré tangent

$$\mathrm{T}M \to M \tag{1}$$

qui est un fibré vectoriel de même rang que la dimension de M.

Tout point de $\mathrm{T}M$ peut s'écrire (x, v) avec $x \in M$ et $v = \dot{c}(0)$ pour $c(t)$ une courbe de M vérifiant $c(0) = x$.

Si $f\colon M \to N$ est une fonction lisse, alors elle induit une différentielle

$$f_*\colon \mathrm{T}M \to \mathrm{T}N \tag{2}$$

dont une description est :

$$\forall (x, v) \in \mathrm{T}_x M,\ f_*(x, v) = (f(x), \mathrm{d}f_x(v)) \in \mathrm{T}_{f(x)}M. \tag{3}$$

Un champ de vecteurs V est la donnée d'une section de $\mathrm{T}M \to M$. C'est-à-dire que pour tout $x \in M$, $V(x) \in \mathrm{T}_x M$.

Le flot d'un tel champ de vecteur est la solution du problème différentiel $\dot{c}(t) = V(c(t))$ dont il faut préscrire une condition initiale $c(0) = x$. Nous écrivons parfois $\phi^t(x)$ la solution de ce problème, avec t un paramètre réel dont le domaine de définition dépend de x.

Si V et W sont deux champs de vecteurs, alors nous pouvons regarder la dérivée de W le long de V, désignée par $V(W)$. C'est le champ de vecteurs défini par, avec ϕ le flot de V,

$$V(W)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{\phi_*^{-t}(W(\phi^t(x))) - W(x)}{t}. \tag{4}$$

La même définition permet aussi de définir $V(W)$ lorsque W est un tenseur quelconque, auquel cas $V(W)$ est du même type que W. Cette opération est la *dérivée de Lie* le long de V et elle est aussi désignée parfois par $\mathscr{L}_V$.

Une 1-forme différentielle est la donnée duale d'un champ de vecteurs. Le fibré tangent $\mathrm{T}M \to M$ est dual à un fibré cotangent $\mathrm{T}M^* \to M$ défini par dualité des espaces vectoriels.

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathrm{T}_x M$ alors il existe une unique base $(e^1, \dots, e^n)$ de $\mathrm{T}_x M^*$ telle que $e^i(e_j) = \delta_{ij}$.

Si ω est une 1-forme différentielle sur M et si $f\colon N \to M$ est lisse, alors le tiré-en-arrière $f^*\omega$ est donné par

$$\forall (x, v) \in \mathrm{T}_x M,\ f^*\omega(x, v) = \omega(f_*(x, v)). \tag{5}$$

Si ω est une 1-forme, sa différentielle est déterminée par :

$$\mathrm{d}\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) \tag{6}$$

pour deux champs de vecteurs X, Y (qui peuvent par exemple prolonger une valeur particulière).

En particulier, avec $\omega = \mathrm{d}\,\mathrm{id}$, $\mathrm{d}^2\mathrm{id} = 0$ et donc

$$[X, Y] = X(Y) - Y(X). \tag{7}$$

Soit $M_1 \times M_2$ le produit de deux variétés. Alors $\mathrm{T}(M_1 \times M_2)$ est isomorphe à $\mathrm{T}M_1 \oplus \mathrm{T}M_2$. Cette identification suit les projections sur les coordonnées :

$$\pi_1 \colon M_1 \times M_2 \to M_1 \text{ et } \pi_2 \colon M_1 \times M_2 \to M_2. \tag{8}$$

Désignons par ϕ le produit des deux coordonnées :

$$\phi \circ (\pi_1 \times \pi_2) = \mathrm{id}. \tag{9}$$

Alors ϕ_* est la somme vectorielle : si $v_1 \in \mathrm{T}_{x_1} M_1$ et $v_2 \in \mathrm{T}_{x_2} M_2$ alors $\phi_*(v_1, v_2) = v_1 + v_2 \in \mathrm{T}_{(x_1,x_2)} M_1 \times M_2$.

Si ω est une forme définie sur $M_1 \times M_2$, alors par linéarité elle peut être décomposée dans les deux facteurs :

$$\omega(v_1, v_2)|_{(x_1,x_2)} = \omega(v_1, 0)|_{(x_1,x_2)} + \omega(0, v_2)|_{(x_1,x_2)}. \tag{10}$$