TD 1 : groupes et algèbres de Lie

Raphaël ALEXANDRE et Elisha FALBEL

Mercredi 19 janvier 2022

EXERCICE 1

Avec $\mathbf{K}$ le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, on note $\mathscr{M}(\mathbf{K}^n)$ l'espace des endomorphismes linéaires de $\mathbf{K}^n$. On note $\mathrm{GL}(\mathbf{K}^n)$ les isomorphismes linéaires de $\mathbf{K}^n$.

(1) Montrer que $\mathrm{GL}(\mathbf{K}^n)$ est un ouvert dense dans $\mathscr{M}(\mathbf{K}^n)$.

(2) Montrer dans $\mathscr{M}(\mathbf{K}^n)$ que $\mathrm{d}_{\mathrm{id}}\det(A) = \mathrm{tr}(A)$.

(3) Pour une base choisie, on identifie $\mathscr{M}(\mathbf{K}^n)$ aux matrices exprimées dans cette base. Calculer les algèbres de Lie de :

$$\mathrm{GL}_n(\mathbf{K}) = \left\{ M \in \mathscr{M}(\mathbf{K}^n) \,\middle|\, \det M \neq 0 \right\}, \tag{1}$$

$$\mathrm{SL}_n(\mathbf{K}) = \left\{ M \in \mathscr{M}(\mathbf{K}^n) \,\middle|\, |\det M| = 1 \right\}, \tag{2}$$

$$\mathrm{O}(n) = \left\{ M \in \mathscr{M}(\mathbf{R}^n) \,\middle|\, {}^tMM = \mathrm{id} \right\}, \tag{3}$$

$$\mathrm{U}(n) = \left\{ M \in \mathscr{M}(\mathbf{C}^n) \,\middle|\, {}^t\overline{M}M = \mathrm{id} \right\}. \tag{4}$$

(4) Avec

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & I_n & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

vérifier que J est une forme hermitienne de signature $(n+1, 1)$, et calculer les algèbres de Lie de :

$$\mathrm{O}(4,1) = \left\{ M \in \mathscr{M}(\mathbf{R}^6) \,\middle|\, {}^tMJM = J \right\}, \tag{6}$$

$$\mathrm{U}(2,1) = \left\{ M \in \mathscr{M}(\mathbf{C}^3) \,\middle|\, {}^t\overline{M}JM = J \right\}. \tag{7}$$

EXERCICE 2

Le but de l'exercice est de manipuler le groupe affine. On considère $\mathrm{Aff}(\mathbf{R}^n) = \mathbf{R}^n \rtimes \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ le groupe affine agissant sur $\mathbf{R}^n$. Si T est une transformation affine, alors il existe $c \in \mathbf{R}^n$ et $f \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ tel que $T(x) = c + f(x)$.

(1) Montrer que l'inclusion $\mathrm{Aff}(\mathbf{R}^n) \to \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbf{R})$ (avec une représentation matricielle) donnée par :

$$(c, f) \mapsto \begin{pmatrix} f & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

est un morphisme de groupes.

(2) À travers ce morphisme, calculer l'algèbre de Lie de $\mathrm{Aff}(\mathbf{R}^n)$ et identifier chacun des facteurs de $\mathbf{R}^n \oplus \mathfrak{gl}_n = \mathfrak{aff}_n$.

(3) Avec $f \in \mathfrak{gl}_n(\mathbf{R}) \subset \mathfrak{aff}_n(\mathbf{R})$ et $x \in \mathbf{R}^n \subset \mathfrak{aff}_n(\mathbf{R})$, calculer $[f, x]$. Calculer aussi $[\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n]$ avec $\mathbf{R}^n \subset \mathfrak{aff}_n(\mathbf{R})$.

Exercice 3

On note encore ω_G la forme de Maurer-Cartan de G.

(1) Si ϕ est une 1-forme différentielle et X, Y deux champs de vecteurs lisses, montrer
$$\mathrm{d}\phi(X,Y) = X(\phi(Y)) - Y(\phi(X)) - \phi([X,Y]). \tag{9}$$
Observer le cas où $\phi = \mathrm{id}$.

(2) Montrer *l'équation de structure*
$$\mathrm{d}\omega_G(v,w) = [\omega_G(v), \omega_G(w)] \tag{10}$$
avec $v, w \in \mathrm{T}_x G$. (*Indication :* les champs invariants à gauche fournissent une base du tangent en chaque point.)

Exercice 4

Commenter et prouver l'affirmation suivante dans le contexte des groupes de Lie et des espaces homogènes : *la forme de Maurer-Cartan est une loi de raccordement infinitésimale.*

Exercice 5

On considère un groupe de Lie G agissant transitivement sur $X = G/H$. On désigne $\mu\colon G \times G \to G$ la loi de groupe. On désigne par $L_g\colon G \to G$ l'application $\mu(g,\cdot)$ et par $R_g\colon G \to G$ l'application $\mu(\cdot, g)$.

(1) Rappeler la définition de la forme de Maurer-Cartan de G, que nous désignerons ω_G. Calculer $R_g^*\omega_G$ pour $g \in G$ fixé.

(2) Interpréter géométriquement le résultat obtenu en considérant l'action (à gauche) de G sur $X = G/H$. (*Indication :* prendre $g \in H$.)

(3) Calculer $\mu^*\omega_G$.

Exercice 6

On considère le groupe des isométries euclidiennes, $\mathrm{Euc}_n(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^n \rtimes \mathrm{O}(n) \subset \mathrm{Aff}_n(\mathbf{R})$. On considère par ailleurs le groupe $\mathrm{O}(n+1)$.

(1) Montrer que $\mathrm{O}(n+1)$ agit transitivement sur la sphère S^n. Montrer que l'isotropie est isomorphe à $\mathrm{O}(n)$.

(2) Montrer par calcul que l'on a une décomposition $\mathfrak{o}_{n+1} = \mathfrak{o}_n \oplus \mathbf{R}^n$.

(3) Trouver un isomorphisme linéaire $\mathfrak{euc}_n \to \mathfrak{o}_{n+1}$ qui identifie les facteurs $\mathfrak{o}_n$ et $\mathbf{R}^n$.

(4) On prend maintenant $n = 2$ pour procéder à des calculs simples. Avec $u, v \in \mathbf{R}^2$, calculer $[u,v]$ dans chacune des algèbres $\mathfrak{euc}_2$ et $\mathfrak{o}_3$.

(5) Interpréter géométriquement et calculer
$$\langle [e_1, e_2] e_2, e_1 \rangle \tag{11}$$
dans la base canonique de $\mathbf{R}^2$.

(6) Répéter l'exercice avec $\mathrm{O}(n,1)$ et l'espace hyperbolique.